

Kesirli Fourier Dönüşümü Genliklerinden Karmaşık Sinyallerin Geri Kazanımı

Complex signal recovery from fractional Fourier transform intensities

M. Günhan Ertosun, Haluk Atlı, Haldun M. Özaktaş, Billur Barshan

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi 06800, Bilkent, Ankara

{ertosun, atli, haldun, billur}@ee.bilkent.edu.tr

Özetçe

Bu makalede kesirli Fourier dönüşümü genlikleri kullanılarak karmaşık sinyallerin evrelerinin bulunması üzerinde durulmuştur. Bu aynı zamanda optik eksenine boyuna rastgele iki yerde yapılan genlik ölçümlerinden evre bilgisinin bulunmasına karşılık gelmektedir. İteratif algoritmanın yakınsaklığı, gürültü ve ölçüm hatalarının etkisi ve bunların dönüşümün kesir değerine olan bağlılığı incelenmiştir. Genel olarak, kesir değerinin ünitere yakın olduğu durumlarda, sıfıra yakın olduğu durumlara göre daha iyi sonuçlar elde edilmiştir. Buna göre, en iyi sonuçları elde etmek için, iki ölçüm düzlemi arasındaki kesir değeri ünitere olabildiğince yakın seçilmelidir.

Abstract

The problem of recovering a complex signal from the magnitudes of two of its fractional Fourier transforms is addressed. This corresponds to phase retrieval from the transverse intensity profiles of an optical field at two arbitrary locations along the optical axis. The convergence of the iterative algorithm, the effects of noise or measurement errors, and their dependence on the fractional transform order are investigated. It is observed that in general, better results are obtained when the fractional transform order is close to unity and poorer results are obtained when the order is close to zero. It follows that to the extent that conditions allow, the fractional order between the two measurement planes should be chosen as close to unity or other odd integer) as possible for best results.

1. Giriş

Kesirli Fourier dönüşümünün etki alanı zaman ve frekans bölgelerinin genellenmesiyle ifade edilebilir. Diğer bir deyişle, kendisi zaman bölgesinde, Fourier dönüşümü frekans bölgesinde bulunan fonksiyonun kesirli Fourier dönüşümü kesir değerine karşılık gelen kesirli Fourier bölgesinde bulunmaktadır [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Gerchberg-Saxton (GS) algoritması kullanılarak evrenin bulunması daha önce birçok makaleye konu olmuştur [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 22]. GS algoritmasında Kesirli Fourier dönüşümü genliklerinin kullanılması da güncel bir araştırma konusudur. Tomografi üzerine yoğunlaşan birkaç makalede sinyalin tüm kesir değerleri için

kesirli Fourier dönüşümünün genlik bilgisi kullanılarak evre bulunmaya çalışılmıştır [23, 24]. Birbirine çok yakın ama farklı değerlere sahip iki kesirdeki genlik bilgisinin kullanıldığı ve iteratif olmayan bir algoritma ile evrenin bulunduğu bazı başarılı çalışmalar da yakın tarihte gündeme gelmiştir [25, 26, 20]. Fresnel dönüşümü genliklerinden evrenin bulunmaya çalışıldığı iteratif algoritmalar, kesirli Fourier dönüşümünün kullanıldığı algoritmalara benzerlik göstermektedir ve çıkan sonuçlar da benzerdir [21, 27]. Kesirli Fourier dönüşümünün üniterlikten saptığı durumların incelendiği makalelerde, bu durum için genelde daha iyi sonuçlar veren Yang-Gu algoritması ön plana çıkarılmıştır [28, 29, 30, 31]. Bu makalede genel olarak iki farklı kesir değeri için genlik bilgisi kullanılarak evrenin elde edilmesi problemi incelenmiştir. İki genlik bilgisinden başka herhangi bir ek bilgi veya varsayım kullanılmamıştır. GS algoritması en yalın haliyle kullanılmıştır ve bu sayede sonuçların sadece kesirler arasındaki farka göre değişmesi ve bu değişim incelenirken başka etkilerle karşılaşılması amaçlanmıştır. Ayrıca, sonuçların ölçüm hatalarına göre nasıl değişebileceğine ilişkin inceleme de yapılmıştır. Çıkan sonuçlar uyarınca, genel olarak şu söylenebilir: Eğer genlik bilgisi bilinen kesir değerleri arasındaki fark 1'e yakın ise, ki tam 1 olduğunda Fourier dönüşümü söz konusudur, hem algoritmanın yakınsaklığı açısından, hem de elde edilen hata oranı açısından evre daha iyi saptanabilmektedir.

2. Örnekler

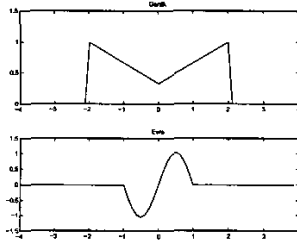
Bu makalede kullanılan GS algoritması şöyle özetlenebilir: Kolaylık sağlama açısından genlik bilgisine 0 ve a kesirlerinde sahip olduğumuzu varsayalım. İlk olarak genlik bilgisini bildiğimiz zaman bölgesindeki fonksiyona sabit bir evre değeri eklenir ve a kesirinde kesirli Fourier dönüşümü alınır. Bu dönüşümün evre bilgisi korunur, genlik yerine doğru olan genlik konularak ters kesirli Fourier dönüşümü alınır. Daha sonra elde edilen fonksiyonun yine genlik bilgisi, doğru olanı ile değiştirilir ve evre korunarak, tekrar kesirli Fourier dönüşümü alınır. Bu gelişime iteratif bir şekilde, algoritma sonuca ulaşmaya kadar devam edilir. Burada belirtmemiz gereken, algoritmanın sonuca sabit bir değer kadar yaklaşabilmesidir. Bulunan sonuçtaki sabit terim, belirli bir yöntem ile elenmiştir.

Order	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
10 iterations	0.3209	0.2509	0.1778	0.1327	0.1017	0.0681	0.0464	0.0395	0.0447	0.0001
100 iterations	0.1893	0.0825	0.0470	0.0250	0.0199	0.0088	0.0004	0.0013	0.0003	0.0001

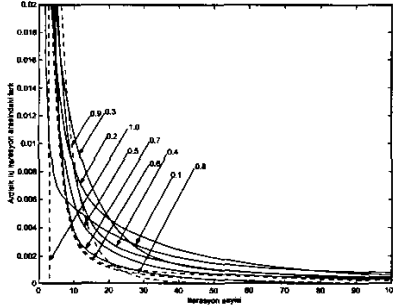
Tablo 1: İlk örnek için nihai hata tablosu.

Order	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
SNR= 1	1.5920	1.6488	1.5392	1.3719	1.4465	1.2967	1.3014	1.0782	1.2846	1.3038
SNR= 10	1.0300	1.1169	0.8108	0.5813	0.7190	0.7487	0.4576	0.5578	0.4804	0.4181
SNR= 100	0.4315	0.3019	0.2982	0.2863	0.2041	0.2480	0.2297	0.1387	0.1150	0.1520
SNR= 1000	0.2822	0.1574	0.0983	0.0715	0.0804	0.0547	0.0846	0.0585	0.0514	0.1095
SNR= 10000	0.2653	0.1118	0.0783	0.0333	0.0352	0.0207	0.0174	0.0228	0.0255	0.0173

Tablo 2: İlk örnek için gürültü varlığında nihai hata tablosu.



Şekil 1: İlk örnek için genlik ve evre değerleri.



Şekil 2: İlk örnek için ardışık iki iterasyon sonucu arasındaki fark.

Örnek olarak kullandığımız ilk sinyalin grafiği 1. şekilde görülebilir. Sonuç olarak gösterilen grafikte ise ardışık iki iterasyon sonrasında elde edilen evre değerlerinin farkı gösterilmiştir. Bu grafikten görülebileceği üzere, genlik bilgisi bilinen kesirler arasındaki fark düşük olduğu zaman, algoritmanın hızı düşmektedir. Diğer bir ifadeyle, birbirine yakın genlik profili bilgisi, algoritmanın yavaşlamasına neden olmaktadır. 100. iterasyon değeri için, ardışık kesir değerlerine karşılık gelen evre farkının en büyük olduğu kesir değeri 0.1, en küçük olduğu kesir değeri ise 1.0'dir ve azalan sıralama 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 0.7, 0.9, 1.0 şeklindedir.

1. tabloda 100. ve 1000. iterasyonlar sonrası bulunan evre değerlerinin olması gereken evre değerinden ne kadar saptığı görülmektedir. Tabloda görüleceği üzere, genlik bilgisi bilinen kesirler arasındaki fark arttıkça, nihai hata değeri azalmaktadır. 2. tablo ise bilinen genlik bilgilerine belli bir ölçüm hatası eklendikten sonraki sapmaları göstermektedir. Tabloda yüksek kesir farklarının ölçüm hatalarına karşı daha dirençli olduğunu görmekteyiz. Genel olarak, ölçüm hatası arttıkça, gerçek evreden sapma oranı da her kesir değeri için artmıştır ki bu beklenen bir sonuçtur. Bu artış ve azalışların kesir değerlerine bağlı olarak düzenli bir şekilde oluştuğu tabloda görülmektedir.

3. grafikte ikinci örnek görülmektedir. Bu örnek için elde edilen sonuçlar genel olarak ilk örnek ile benzerlik göstermektedir. Fonksiyonun içeriği daha karmaşık olduğundan, bu örnekte algoritmanın sonlanması için daha yüksek iterasyon değerlerine çıkmak gerekmiştir. Önceki örnekte bahsi geçen sıralama, bu örnek için 0.2, 0.3, 0.4, 0.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0 şeklinde tutarlıdır. 3. tablo 1000. ve 10000. iterasyon değerleri sonrası nihai hataları göstermektedir. Sonuçlar birinci örnekte olduğu gibi, genlik bilgisi bilinen kesirler arasındaki farkın artışıyla, nihai hata değerinin azaldığını göstermektedir. Bir sonraki tabloda ise ölçüm hatalarının algoritmaya etkisi incelenmiş, ve yine birinci örnekte olduğu gibi, genel olarak, kesirler arasındaki farkın artışıyla, ölçüm hatalarına karşı direncin de arttığı gözlemlenmiştir.

3. Sonuç

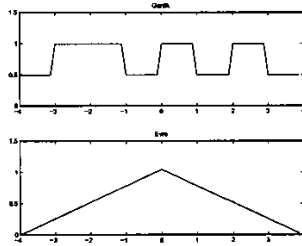
Bu makalenin belli başlı gözlemleri şu şekilde özetlenebilir: Birbirleriyle olan ilişkileri kesirli Fourier dönüşümü olan iki fonksiyona GS algoritması uygulandığında ortaya çıkan nitel sonuçlar, bu iki fonksiyonun ilişkilerinin normal Fourier

Order	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1000 iterations	0.2214	0.1761	0.1331	0.1792	0.1218	0.0457	0.0419	0.0199	0.0225	0.0362
10000 iterations	0.1661	0.1971	0.0258	0.1902	0.1564	0.0495	0.0089	0.0174	0.0028	0.0362

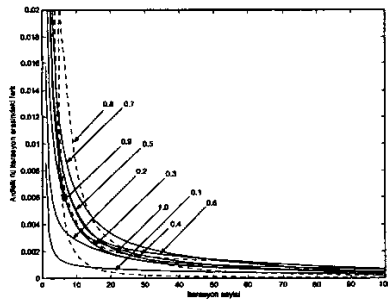
Tablo 3: İkinci örnek için nihai hata tablosu.

Order	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
SNR= 1	1.7566	1.8763	1.6561	1.5569	1.7836	1.5632	1.5268	1.4174	1.5744	2.1656
SNR= 10	1.3649	1.2891	0.9952	1.5503	1.0180	2.0083	0.9767	0.7873	1.8889	0.5579
SNR= 100	0.6118	0.6477	0.5983	0.4031	0.6166	0.3033	0.4493	0.3476	0.1500	0.4052
SNR= 1000	0.1816	0.2635	0.2707	0.2873	0.2422	0.2240	0.3484	0.1040	0.1106	0.0686
SNR= 10000	0.2109	0.1969	0.1415	0.1775	0.1582	0.0940	0.0690	0.0328	0.0625	0.0449

Tablo 4: İkinci örnek için gürültü varlığında nihai hata tablosu.



Şekil 3: İkinci örnek için genlik ve evre değerleri.



Şekil 4: İkinci örnek için ardışık iki iterasyon sonucu arasındaki fark.

dönüşümü olduğu durumdaki sonuçlarla benzerlik taşımaktadır. Kesir değeri 1'den 0'a doğru azalırken sonuçlarda genel bir bozulma gözlenmiştir. Fakat bu bozulma birinci kesirden uzaklaştığında ani bir değişimden ziyade, kesir 1'den 0'a doğru azalırken derece derece görülen bir bozulma davranışdır. Kesir değerinin azalmasına bağlı olarak görülen bu bozulmanın birden çok yönü vardır. Küçük kesirler için yakınsaklık daha az memnun edici ve duraksamalar daha sık rastlanan bir olgudur. Dahası, bu küçük kesirler için genel olarak daha büyük nihai hatalar elde edilmiştir. Bu durumda, gürültü etkisi, kesire olan bağımlılığı dengeleyici bir faktördür. Gürültü miktarı az olduğunda, nihai hatalar kesire bağımlıdır ve küçük kesirlerde daha büyük miktarlarda nihai hata elde edilir. Gürültü miktarı arttığında ise, değişik kesirlerde elde edilen nihai hata değerleri birbirlerine yaklaşır ve çok yüksek gürültü miktarlarında, SNR= 1 iken, tüm kesirler için elde edilen nihai hatalar kabaca birbirlerine yakın duruma gelirler. Genel bir değişle, verilen bir kesir değeri için, nihai hata beklenildiği gibi, azalan gürültü miktarı ile azalmaktadır, ve bu azalma yüksek kesirler için daha büyük olmaktadır. Aynı şekilde, belirli bir SNR için nihai hata, kesrin azalmasıyla birlikte azalmaktadır ve bu azalma yüksek SNR değerleri için daha etkilidir. Ayrıca tekrar belirtmeliyiz ki, bu genel sonuçların uygunluğu kullanılan örneklere göre değişebilir ve bu yüzdendir ki, bu sonuçlar kesin, katı kurallar olarak değil, genel bir model olarak ele alınmalıdır. Sonuçlar, her zaman olmasa bile genellikle kesir 1'e yaklaşırken iyileşmektedir ve 0'a yaklaşırken kötüleşmektedir. Bu anlaşılabilir bir sonuçtur, nitekim eğer kesir 0 olsaydı; elimizdeki fonksiyon ve kesirli Fourier dönüşümü birbirlerinin aynısı olacaktı ve de dolayısı ile evreyi bulabilmek için elimizde yeterli bilgi olmayacaktı. Bu yüzdendir ki, kesir 0'a yaklaşırken problemin daha zorlaşması kaçınılmazdır. Aslında, bilinen büyüklüklerin birbirlerine "dik" olmaları durumunda en iyi çözüm beklenmelidir (buradaki "dik" kavramı ile uzay-frekans düzleminde birbirine dik FR etki alanları kastedilmiştir). Birbirine yakın kesirlerde, problem doğası gereği "hastalıklı" bir yapıya bürünmektedir. Birbirine yakın iki kesirde genlik bilgisine sahip olmaksansa, birbirinden 1'e (ya da başka bir tek tamsayı kadar) yakın denecek kesirde ayrılmış iki genliğin bilinmesi yeğdir. Kesirlerin birbirine yakın olduğu durumlar içinse [25, 26]'da daha başka metodlar önerilmiştir. Şunu da belirtmeliyiz ki [22]'de değişik FR etki alanlarında evre ve genliğin önemi ele alınmıştır. Bir önceki paragraftan da çıkarılabileceği gibi, bir optik sistemde

iki genlik ölçümü yapılacaksa, ve bu ölçümlerden evre bilgisi elde edilmek isteniyorsa; en iyisi ölçüm düzlemlerinin birbirine “dik” etki alanları olarak seçilmesidir. Kesirli Fourier dönüşümü temelli yaklaşımlardan hemen çıkarılabilen bu sonuç, Fresnel dönüşümü temelli yaklaşımlardan bu kadar kolay ve net çıkmayabilirdi.

4. Teşekkür

Haldun M. Özaktas'ın katkısı Türkiye Bilimler Akademisi tarafından kısmen desteklenmiştir.

Kaynakça

- [1] H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, ve M. A. Kutay, *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing* (Wiley, New York, 2001).
- [2] H. M. Ozaktas ve D. Mendlovic, *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 743–751 (1995).
- [3] O. Aytür ve H. M. Ozaktas, *Opt. Commun.* **120**, 166–170 (1995).
- [4] H. M. Ozaktas ve O. Aytür, *Signal Processing* **46**, 119–124 (1995).
- [5] C. Candan et al. *IEEE Trans. on Signal Processing* **48**, 1329–1337 (2000).
- [6] H. M. Ozaktas et al. *IEEE Trans. on Signal Processing* **44**, 2141–2150 (1996).
- [7] H. Stark, editör, *Image Recovery: Theory and Application* (Academic Press, San Diego, 1987).
- [8] R. W. Gerchberg ve W. O. Saxton, *Optik (Stuttgart)* **35**, 237–246 (1972).
- [9] J. R. Fienup, *Applied Optics* **21**, 2758–2769 (1982).
- [10] H. H. Bauschke et al. *J. Opt. Soc. Am. A* **19**, 1334–1345 (2002).
- [11] G. Yang ve B. Gu, *Acta Phys. Sin.* **30**, 410–413 (1981).
- [12] B. Gu ve G. Yang, *Acta Opt. Sin.* **1**, 517–522 (1981).
- [13] G. Yang et al. *Applied Optics* **33**, 209–218 (1994).
- [14] Z. Zalevsky et al. *Opt. Lett.* **21**, 842–844 (1996).
- [15] Y. Zhang et al. *J. Opt. Soc. Am. A* **15**, 1114–1120 (1998).
- [16] M. R. Teague, *J. Opt. Soc. Am.* **73**, 1434–1441 (1983).
- [17] N. Streibl, *Opt. Commun.* **49**, 6–10 (1984).
- [18] K. Ichikawa et al. *Applied Optics* **27**, 3433–3436 (1988).
- [19] T. E. Gureyev et al. *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 1942–1946 (1995).
- [20] M. Bastiaans ve K. Wolf *J. Opt. Soc. Am. A* **20**, 1046–1049 (2003).
- [21] T. E. Gureyev, *Opt. Commun.* **220**, 49–58 (2003).
- [22] T. Alieva ve M. L. Calvo, *J. Opt. Soc. Am. A* **20**, 533–541 (2003).
- [23] M. G. Raymer et al. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1137–1140 (1994).
- [24] D. F. McAlister et al. *Opt. Lett.* **20**, 1181–1183 (1995).
- [25] T. Alieva ve M. J. Bastiaans, *IEEE Signal Processing Letters* **7**, 321–323 (2000).
- [26] T. Alieva et al. *IEEE Trans. on Signal Processing* **51**, 112–123 (2003).
- [27] W.-X. Cong et al. *J. Opt. Soc. Am. A* **16**, 1827–1830 (1999).
- [28] B. Dong et al. *J. Opt. Soc. Am. A* **14**, 2709–2714 (1997).
- [29] W.-X. Cong et al. *Applied Optics* **37**, 6906–6910 (1998).
- [30] W.-X. Cong et al. *Chinese Phys. Lett.* **15**, 24–26, (1998).
- [31] W.-X. Cong et al. *Chinese Science Bulletin* **43**, 40–44, (1998).